

Úvod do diskrétných štruktúr

- ujo požaduje premé definície
- ## "memorovanie nie je hra"

- semester = 100 bodov $\rightarrow$ 100 = D.Ú.
- 200 = semesterálna písomka
- 300 = skúšková písomka

A - 90 - 100
B - 80 - 89
C - 65 - 79
D - 55 - 64
E - 50 - 54
FX

3.M. 18^{to} (A)
 $\rightarrow$ semesterálna písomka

web: dcs.fmph.uniba.sk / ~rajnik/udds
kód na teams: flwfyrvg

"nehierarchické štruktúry"

- discrete $\rightarrow$ not continuous
- každá teória má svoje axiomy alebo ich preberá z inej

BUDOVANIE MATEMATICKÝCH POJMOV

pr. PROJEKTÍVNA GEOMETRIA

bod priamka
 $p \in \ell$

1. $\forall$ dva body existuje jediná priamka, kt. nimi prechádza.
2. $\forall$ priamky majú práve jeden spoločný bod
3. $\exists$ 4 body, 2 kt. žiadne 3 neležia na jednej priamke

- poznatky formujeme vo forme výrokov

$\rightarrow$ veta, ktorú má smysel sa hovoriť o jej pravdivostnej hodnote (0/1, T/F)
(asertácia)

("TÁTO VETA JE NEPRÁVDIVÁ" $\leftarrow$ toto nie je výrok)
lebo novot sama o sebe

- spájanie výrokov pomocou logických spojok:

1. KONJUNKCIA

- $V_1 \wedge V_2$
- pravdivostná hodnota je práve jedna a to vtedy, keď platia obe

2. DISJUNKCIA

- $V_1 \vee V_2$
- pravdivá vo $\forall$ prípadoch okrem jedného (0 0)

- alebo $\neg$ vylučujúca (alternatíva, xor) - buď-alebo, nie obe vylučujúce

3. NEGÁCIA

4. IMPLIKÁCIA

- $V_1 \Rightarrow V_2$
- neplatí v prípade (1 0)

5. EKUIVALENCIA

- $V_1 \Leftrightarrow V_2$ ($= (V_1 \Rightarrow V_2) \wedge (V_2 \Rightarrow V_1)$)
- platí len ak je pravdivostná hodnota oboch rovnaká

- tautológia - složený výrok, kt. je vždy pravdivý bez ohľadu na pravdivostné hodnoty výrokov

TAUTOLOGIE

• IDEMPOTENTNOST

- = produkcievanie samého seba
- výtvor sa konj. a dij.
- : $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
- : $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

• KOMUTATIVNOST

- = ak máme 2 výroky p a q , tak je to to isté, ako keď sú v opačnom poradí
- : $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
- : $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

• ASOCIATIVNOST

- = vieme — skĺbiť do záŕokiek (na rozmiestnení záŕokiek nezáleží)
- : $(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
- : to isté aj pre disjunktciu

• ABSORPČNÉ ZÁKONY

- I. $(p \wedge q \vee p) \Leftrightarrow p$
- II. $(p \vee q \wedge p) \Leftrightarrow p$

pre lepšie pochopenie môžeme konj. nahradit prenikaním a dij. zjednotením

$$\begin{aligned} p \wedge q & \min(p, q) \\ p \vee q & \max(p, q) \end{aligned}$$

• DISTRIBUTÍVNE ZÁKONY

- I. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- II. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

navzájom dualné $\rightarrow$ viem si to nahradit inou operáciou (viem $\wedge$ spraviť $\vee$ a pod)

na tabuľke bolo $\wedge$ ale asi sa pomyšľal

• ZÁKON DVOJITEJ NEGÁCIE

- označenie negácie: $v = p$; mg : $\neg p / \bar{p} / p'$ / NON p
- I. $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

• ZÁKON VYLÚČENIA TRETEHO

- I. $(p \vee (\neg p)) \Leftrightarrow 1$ (stále pravdivý)
- II. $(p \wedge (\neg p)) \Leftrightarrow 0$

• ZÁKON SPORU

možno je to toto, nepočula som

• ZÁKON KONTRAPOZÍCIE NEGÁCIE

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

- Wahrheitstafel

výtvor - viac prípadov v jednej vete $\Rightarrow$ preto nahradzujeme

veľké premenné
 $\hookrightarrow$ výtvorové formy
 $\downarrow$
výraz, kt. závisí od nejakej premennej

- Quantifikatory

$\forall$ - pre všetky (a pod) [Univerzálny kv.] (Σ)
 $\exists$ - [Existenčný kv.] (Dirichetova veta o prvociiskach) (Π)
obštrukt A (für alle) obštrukt E (existuje)

$\downarrow$
 $\forall a, d \in \mathbb{N} \exists$
 $n \in \mathbb{N}$ takí, že $a + d \cdot n$
je prvocíslo
 $\hookrightarrow$ aritmetická postupnosť

pr. $a(0)$ $x \in \mathbb{N}$
 $\hookrightarrow x$ je prvocíslo
 $\hookrightarrow$ treba doplniť aritmetickú premennú a prírodnú množinu

- vyřet. forma $a(x)$
 - $(\forall x)(a(x)) \Rightarrow (\exists x)(a(x))$
 - ↳ ale 1, tak $\Rightarrow$ je tautologie

je lepší používat zdročky vícej, ale méněj

$$\neg(\forall x)(a(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x)(a(x)) \quad (p \Leftrightarrow q \text{ (přímá) } (q \Rightarrow p))$$

$$\neg(\exists x)(a(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg a(x))$$

tu si různé podroby

SAMÁ MATIKA VŠADE

- hypotéza - vyložení tvrzení, které pravdivost třeba dokázat
- důkazy - řetěz implikací $(A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \dots, A_{n-1} \Rightarrow A_n, A_n \Rightarrow B)$
 - odvodovací pravidla (z platnosti výroku A vyplývá pravidlo B)
 - MODUS PONENS: $\text{Kt platí výrok } A \text{ a je pravdivá implikace } A \Rightarrow B, \text{ tak potom je pravdivý výrok } B.$

$$\frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$
 - pravidlo samostatnosti (MODUS TOLENS): $\text{Kt platí implikace } A \Rightarrow B \text{ a výrok } B \text{ neje pravdivý, tak potom nepatí ani výrok } A.$

$$\frac{A \Rightarrow B, \neg B}{\neg A}$$
 - odvození nezávěry: REDUCTIO AD ABSURDUM: $\text{Kt z negace výroku } A \text{ vyplývá } A, \text{ tak } A \text{ platí.}$

$$\frac{\neg A \Rightarrow A}{A}$$

DŮKAZY

Tvr.: $\text{Kt přirozené číslo je dělitelné dvěma a třema, tak potom je dělitelné šestmi.}$

$$\begin{aligned} D: \quad n \in \mathbb{N} \quad & n = 2k \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N} \\ & n = 3l \text{ pro nějaké } l \in \mathbb{N} \\ & 2k = 3l \\ & 2 \mid 2k \Rightarrow 2 \mid 3l, m \in \mathbb{N} \\ & n = 3l = 3 \cdot 2m = 6m \\ & \underline{6 \mid n} \end{aligned}$$

PŘÍMÝ DŮKAZ

důkaz obměnou (alibí, přímý důkaz, ale iného tvrzení)

$$\# (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

(PR): Tvr.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Potom funkce f je na intervalu $(-0, 0)$ rostoucí.
 $f(x) = -2x^2$

D. (přímý): $\text{Kt } x_1, x_2 \in (-0, 0) \text{ tak, že } x_1 < x_2,$

$$\begin{aligned} \text{přičem } f(x_1) &< f(x_2) & x_1 < x_2 &= 0 \\ -2x_1^2 &< -2x_2^2 & \Rightarrow & |x_1| > |x_2| > 0 \\ \text{TTD?} & & & |x_1|^2 > |x_2|^2 \\ & & & x_1^2 > x_2^2 \\ & & & x_1^2 - x_2^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= -2x_1^2 < -2x_2^2 = f(x_2) \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

DŮKAZ SPOROM - často v diskretní matematice

Tvr. $A \Rightarrow B$

$$A \wedge \neg B \Rightarrow 0$$

↓

platí 0

(PR):

Tvr.: Existuje nekonečně velkých prvočísel.

$\Rightarrow \checkmark$

D. (spor): $\exists$ lca konečné velkých prvočísel.

$\Rightarrow \times$

$$m_1 < m_2 < \dots < m_k$$

$$m_k < m_1 < m_2 < \dots < m_k + 1 < \text{stejně číslo}$$

$$\Rightarrow \exists m_i, i \in \{2, \dots, k\}$$

$$m_i \mid m_1, m_2, \dots, m_k + 1 \quad \times$$

ale je číslo stejné $\rightarrow$ dá se naplnit jako zbytek

prvočísel $\Rightarrow m_1, m_2, \dots, m_k$ ale ale

dik $m_1, m_2, \dots, m_k$ tak nemůže delit $m_k + 1$



$$\mathbb{Q} \rightarrow \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0$$

$$\text{TVR: } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \text{TRUE}$$

$$\text{D. (sprma): } \sqrt{2} \text{ je racionálna} \Rightarrow \text{FALSE}$$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad a, b \text{ nesúdeliteľné}$$

$$a = \sqrt{2} \cdot b$$

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2$$

$$a - a = 2b^2 \quad 2c^2 = b^2$$

$$\downarrow$$

$$2|a$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$

$$a = 2c, c \in \mathbb{N}$$

Súdeliteľné

DŮKAZ MATEMATICKOU INDUKCÍ

- spôsob dokazovania výrok formy závisiaci od prirodzeného čísla $\forall(n)$

TVR: Výrok formy $\forall(n)$ platí pre každé prirodzené číslo. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ alebo každé dané číslo n ($n = n_0 \in \mathbb{N}$).

1. Báza indukcie $\forall(n_0)$ $\checkmark$
2. krok platnosti implikácií $\sim$ $\checkmark$

$$\forall(n) \Rightarrow \forall(n+1) \quad | \text{ indukčný krok}$$

• Nech $M = \{n \in \mathbb{N}; \text{platí výrok } \forall(n)\}$.

Chceme dokázať, že $M = \mathbb{N}$.

1. $0 \in M$ (lebo báza indukcie)
 2. $1 \in M$ (lebo $0 \in M, x \in M \Rightarrow x+1 \in M$)
- ... atď, atď $\Rightarrow M = \mathbb{N}$

• Nech $M = \{n \in \mathbb{N}; \text{platí } \forall(n)\}$. $M = \mathbb{N}_{\geq n_0} = \{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$

$$\mathbb{N} \quad A \in \mathbb{N}$$

Každá neprázdna podmnožina A

maximálny $\mathbb{N}$ má najmenší prvok. (najmenší prvok daný množiny)

$$\text{D. (sprma): } A \neq \emptyset$$

$$\exists n_1 \in A$$

$$n_1 \dots n_2 < n_3 < n_4$$

$$\text{D. (sprma): } M \neq \mathbb{N} \quad M \neq \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} - M \neq \emptyset$$

M_0 - najmenšie $n_0 \in \mathbb{N}$ pre kt. $\forall(n)$ neplatí

$A \Rightarrow$ má min. m_0

$m_0 \neq 0 \Rightarrow m_0 - 1$ je prirod. číslo

$m_0 - 1$ je prirod. $\Rightarrow \forall(m_0 - 1)$ platí

indukčný predpoklad $\leftarrow$ $\downarrow$ $\forall(m_0)$

$$2 \sum_{i=1}^n i = n(n+1) \quad \text{stačí dokázať}$$

$$2 \sum_{i=1}^n i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) + \left(\sum_{i=1}^n i \right) = \left(\sum_{i=1}^n i \right) + \left(\sum_{i=1}^n (n+1-i) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n i + (n+1-i) = n(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{MAT. IND.: } n=1; \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1 \checkmark$$

Nech n je ľubovoľné prirod. číslo, že $\forall(n)$ platí.

Ukážeme, že platí pre $\forall(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + n+1 \stackrel{IP}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\forall(n)$ platí pre každé $n \in \mathbb{N}$

$\forall(0)$

$$\forall(n) \Rightarrow \forall(n+1)$$

$$\forall(0) \wedge \forall(1) \wedge \forall(2) \dots \wedge \forall(n) \Rightarrow \forall(n+1)$$

At výrok $\forall(n)$ platí pre $\forall$ prirod. čísla $\leq n \Rightarrow \forall(n+1)$

At $\forall(k)$ platí $-1, 1, -1, 1, \dots \leq n \Rightarrow \forall(n)$

ÚPLNÁ MAT. IND.

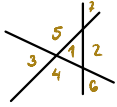
TVR: Každá dvojica k prírodných čísel rovná na najväčšie $\frac{k^2 + k + 2}{2}$ čísel.

6.10.2021

KONTAPOLICIA OPANU: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$\mathbb{R}^2$ - euklidovská rovina

TV1: Každých k přímek ($k \geq 4$) dělí rovinu na nejvíce $\frac{k^2+k+2}{2}$ částí.



D: (ipsum mat. ind): M_1 (vlastnost na k)
 $k=1 \vee$
 $k \geq 2$
 $(k-1)^2 + (k-1) + 2 = \frac{k^2 - 2k + 1 + k - 1 + 2}{2} = \frac{k^2 - k + 2}{2}$

k přímek v rovině
 $(k-1) + 1 \rightarrow$ plus přímek
 $\leq \frac{k^2-k+2}{2} + k = \frac{k^2-k+2+2k}{2} = \frac{k^2+k+2}{2}$

výčet se replikuje = platí aj v dalších krocích

TV2: Každé přirozené číslo ≥ 2 se dá napsat jako součet mocnin prvočísel.

D: $n \geq 2$ $n=2 \vee$
 $n > 2$
 n prvočíslo $\vee$
 n složené číslo

$\exists n_1, n_2 \geq 2$ tak, že $n = n_1 \cdot n_2$

$n_1 < n, n_2 < n \Rightarrow n_1$ je složené prvočíslo
 n_2 je složené prvočíslo } n_1, n_2 je složené prvočíslo

MNOŽINY

ÚVOD DO MNOŽINOVÉ TEORIE MNOŽIN

$\{1, 2, 3\}$

Základní pojmy (definice)
 Základní vztahy mezi množinami (to je to co definuje)

Projektivní geometrie roviny

Základní pojmy euklid. roviny: bod
 přímka

$p \in l$

(bod p leží na přímce l)
 přímka l prochází bodem p

AX1: Libovolnými dvěma body přechází právě 1 přímka.

AX2: Libovolné dvě přímky mají právě 1 společný bod.

AX3: Existují (aspoň) 4 body, z kt. žádná neleží na jedné přímce.

$\{a, b, c, d, \dots\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \quad \frac{a}{b} \quad b \neq 0 \quad a, b \in \mathbb{Z}$

A množina

$A \in B$ (množina A je prvkem množiny B)

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI MNOŽINAMI

A
 $A_1 \in A$
 $A_2 \in A$
 $A_3 \in A$
 $\exists x \neq A_1, A_2, A_3$
 $x \in A$
 $A = \{A_1, A_2, A_3\}$

AXIOMA ROVNOSTI: Je libovolné 2 množiny A, B platí:
 "libovolná rovnost"

$A = B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Množiny se rovnají právě tehdy, když mají to isté prvky.

Def: Nech A je množina. Množina B sa nazýva podmnožinou množiny A , ak platí: $\forall x: x \in B \Rightarrow x \in A$.

- označenie: $B \subseteq A$

- $A = A$

matematická konvencia: v definíciách "ak" znamená "práve vtedy, keď" ($\Leftrightarrow$)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$5\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N}, 5 | x\}$$

$$5\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$$

OPERÁCIE S MNOŽINAMI

Def: Ak A, B sú množiny, tak symbolom $A \cup B = \{x, x \in A \vee x \in B\}$

$\hookrightarrow$ zjednotenie množín A a B

AXIOMA ZJEDNOTENIA: (skladná forma) Ak existujú množiny A a B , tak existuje aj množina $A \cup B$.

Def: Ak A, B sú množiny, tak prienik množín A a B je množina $A \cap B = \{x, x \in A \wedge x \in B\}$

AXIOMA PRÁDNEJ MNOŽINY: Existuje množina A taká, že $\forall x: x \notin A$.

Def: Prázdna množina je množina, kt. nemá žiadnu prvku

- označenie: $\emptyset$ ($\emptyset \subseteq A$)

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

Ak $A \cap B = \emptyset$ tak hovoríme, že A a B sú DISJUNKTÍVNE.

Def (axioma potenčnej množiny): Nech A je množina. Ak $B \subseteq A \Rightarrow B$ je tiež množina. (Ak existuje A a $B \subseteq A$, tak $\exists$ aj množina B).

Def: Nech A je ľubovoľná množina.

Potom symbolom $\mathcal{P}(A)$ označujeme množinu definovanou takto:

$$x \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$$

Množina $\mathcal{P}(A)$ sa nazýva POTENČNÁ množina množiny A .

$\mathcal{P}(A)$ obsahuje
všetchné podmnožiny
množiny A

AXIOMA: Ak existuje množina A , tak existuje aj potenčná množina $\mathcal{P}(A)$.

$$1) \emptyset \neq \emptyset \subseteq \emptyset$$

$$2) \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ A & B \\ \underbrace{\quad} & \quad \\ x & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{L - počet prvkov} \\ |\mathcal{P}(x)| = 2^k \end{array}$$

A	B	
0	0	$\emptyset$
0	1	$\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$
1	0	$\{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
1	1	$\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

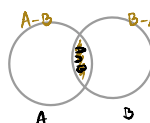
KOMPLEMENT MNOŽINY: (rozdiel dvoch množín)

A, B množiny a $B \subseteq A$, tak symbolom $A - B = \{x \in A, x \notin B\}$

$A \setminus B$ # ak uvažujeme takúto
oblasť vnútri, vďaka sa
páči

- zovšeobecnenie: A, B tak:

$$A - B = \{x \in A, x \notin B\}$$



RUSSELOV PARADOX

- norma lna množiny: $\{x, R(x)\}$

$R: x \neq x$ pr. $N \notin N$

Par. Nech $M = \{x, x \notin x\}$ je množina. # dôkaz sporom
Potom $M \in M$ alebo $M \notin M$.

① $M \in M$

$\Rightarrow$ platí $R(M)$

$\Rightarrow M \notin M$

② nemôže nastať

$\Rightarrow$ ② $M \notin M$

$\neg R(M)$

$\Rightarrow M \in M$

pr. súbor V množín nevyhýba množinám

2. VLASTNOSTI MNOŽÍN A OPERÁCIE S NIMI

TVR:

heba dôkazy

a) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

IDEMPOTENTNOST

b) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

KOMUTATIVNOST

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ASOCIATIVNOST

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

DISTRIBUTIVNOST

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

e) $A \cap (A \cup B) = A$

ABSORBCIA - POHLTENIE

$A \cup (A \cap B) = A$

Nech $A, B, C \dots \subseteq X$ (universum)

$X - A = A^c = \bar{A}$
komplement

f) $(A^c)^c = A$

g) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

de Morganove pravidla

h) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$

i) $A \cap A^c = \emptyset$; $A \cup A^c = X$ (universum)

zjednotenie A

$A \cup A = A$ $\{x, \exists B \in A: x \in B\}$

$A = \{B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\}$

$x \in B$ $\wedge B \in A \Rightarrow x \in A$

$\wedge B \in A$ $x \notin A$

PR $A = \{x \in A \mid \exists B \in A, x \in B\}$ c, F

$U_A = \{a, b, c, d\}$ $c \notin U_A, F \notin U_A$

" $\hat{A}$ sú všetky množiny?"
Ne, nie, pripisujem

$A = nA = \{x, \forall B \in A: x \in B\}$

$A \supset nA$

$nA = \emptyset \rightarrow$ pred musí byť vo všetkých množinách

$A = \{x \in A \mid \exists c \in A, x \in c\}$

$nA = \{c \in A\}$

TVR:

Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny.

Potom sú pravdivé nasledujúce rovnosti:

a) $(A \cap B) - C = A \cap (B - C) = (A - C) \cap (B - C)$ # premení a zjednotenie majú prednosť (pred množinovým radiklom)

b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

c) $C - (A \cap B) = (C - A) \cap (C - B)$

d) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$

e) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

f) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

da sa pomocou Vennovho diagramu dokázať, ale to neberieme ako dôkaz, lebo to treba matematicky nie oviesť

D: d) $A - B = A \cap B^c$

$A - (B - C) = A - (B \cap C^c) = A \cap (B \cap C^c)^c$

$= A \cap (B^c \cup C) = A \cap (B^c \cup C) =$

$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A - B) \cup A \cap C$

□

AXIOMA NEUSPORIADANEJ DVOJICE

AL A, B sú množiny, tak existuje množina C , kt. prvky sú $A \times B$.
 $(x \in C \Leftrightarrow x = A \times B)$ $C = \{A, B\}$

$\textcircled{12} \sum \emptyset \xrightarrow{\text{toto je množina } 0} \{ \emptyset, \emptyset \} = \{ \emptyset \}$
 $\{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$ $\xrightarrow{\text{a toto 2}} \text{toto 1}$

$\{ 0, 1, 2 \} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}$

$n = \{ 0, 1, 2, \dots, n-1 \}$

$4 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

$\{ 2, 2 \} = \{ 2 \}$ $\{ 0, 1 \}$
 $\{ 0, 1, 2 \}$

AXIOMA NEKONEČNA: Existujú aspoň jedna nekonečná množina.

KARTEZIÁNSKY SÚČIN

Máme dve množiny A a B a chceme vytvoriť takú množinu, kt. vyzerá takto:
 $A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$

Uppravujeme definíciu

Def: $a, b \in \{ a, b \}$ nepr. $\Rightarrow \{ \{ a, b \}, \{ a, b \} \}$
 $\{ a, a \} = \{ a \}$ $\text{def: } (a, a) \uparrow$
 príklad

TVR: Nech a, b sú ľubovoľné množiny. Potom: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

D: " $\Leftarrow$ " $\{ \{ a, b \}, \{ a, b \} \}$ - doplniť samostatne ("triviality")

" $\Rightarrow$ " Predpokladajme, že $(a, b) = (c, d)$.

Pripad a. $a = b$

$(a, b) = \{ \{ a, b \}, \{ a, b \} \} = \{ \{ a, a \}, \{ a, a \} \} = \{ \{ a \}, \{ a \} \}$

$(c, d) = \{ \{ c, d \}, \{ c, d \} \} = \{ \{ c, c \}, \{ c, c \} \}$

$\{ \{ c, d \}, \{ c, d \} \} = \{ \{ c \}, \{ c \} \} \Rightarrow \{ \{ c, d \}, \{ c, d \} \} = \{ \{ a \}, \{ a \} \}$

$\Rightarrow a = c \wedge b = d$

Pripad b. $a \neq b$

$\{ \{ a, b \}, \{ a, b \} \} = (a, b) = (c, d) = \{ \{ c, d \}, \{ c, d \} \}$

$\Rightarrow \{ a, b \} = \{ c, d \}$ alebo $\{ a, b \} \neq \{ c, d \}$

$\{ a, b \} = \{ c, d \}$

$\Rightarrow \{ a \} = \{ c \}$

$\Rightarrow \{ b \} = \{ d \}$ $\Rightarrow a = c, b = d$

□

Kotva sčít.

Def.: $A \times B$ sú ľubovoľ. množiny. $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$

$$\{ \{a,3\}, \{a,b\} \}$$

$$\{a,b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$\{a,b\}, \{a,3\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$\{ \{a,b\}, \{a,3\} \} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

$$A \times B \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

Asi som napísal dosť rýchlo... hum, nie!
tak veľmi ešte ničto poviem

$$X \times Y \neq Y \times X$$

ak je jedna z množín prázdna,
tak potom aj táto je prázdna

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

	a_1	a_2	...	a_n
b_1				
b_2				
$\vdots$				
b_n				

20.10.2021

$A \times B \rightarrow \{A, B\}$ - usporiadaná dvojica

$$\{A, B\} = \{B, A\}$$

$$\{ \{A, B\}, \{A, B\} \} = \{A, B\}$$

$$\{A, B\} = \{C, D\}$$

$$\# \begin{matrix} A=C \\ B=D \end{matrix}$$

{ }

$$(A, B, C) = ((A, B), C)$$

$$(A, B, C) = (A, (B, C))$$

} je jedno, či použijem
ale treba mať
korešpondenciu

USPORIADANÁ TROJICA

Def.: A, B, C sú množiny.

Usporiadaná dvojica (A, B, C) je množina (usp. dvojica) $((A, B), C)$

TVR: $(A, B, C) = (A', B', C') \Leftrightarrow A = A'$

$$B = B'$$

$$C = C'$$

$$(A, B, C) \neq ((A, B), C)$$

D. (mat. indukcia) $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$n=2 \quad (x_1, x_2) = \{ \{x_1, x_2\}, x_2 \} \quad (\text{tak ako to bolo predtým})$$

$$n \geq 2 \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \leftarrow \text{medzi je už definované}$$

$$n+1: \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$$

TVR: Ak $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú ľubovoľ. množiny, potom

$$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow \text{---||---}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow x_1 = x_1, x_2 = x_2, \dots, x_n = x_n$$

Karteziansky n-árny súčin

Def.: $A, A_1, A_2, \dots, A_n$ sú ľubovoľné množiny, tak karteziansky súčin

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i, i=1, 2, \dots, n \}$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad A_i \neq \emptyset$$

TVR.: Nech A, B, C, D sú ľubovoľné množiny. Platí:

$$(a) \quad A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$$

$$(b) \quad \text{Ak } A \times B \neq \emptyset \text{ a } A \times B = C \times D \Rightarrow A = C \wedge B = D$$

$$(c) \quad \text{Ak } A \times C = B \times C \text{ a } C \neq \emptyset \Rightarrow A = B$$

$$(d) \quad \text{Ak } A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C \text{ pre } \forall C$$

$$(e) \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \quad \# \text{ možno dokázať: } x \text{ bude mať } n \text{ prvkov pred } n$$

$$(f) \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(g) \quad (A - B) \times C = A \times C - B \times C \quad \left| \begin{array}{l} 1. (A - B) \times C \subseteq A \times C - B \times C \\ 2. A \times C - B \times C \subseteq (A - B) \times C \end{array} \right.$$

D.: g) 1. $(A - B) \times C \subseteq A \times C - B \times C$

$$(x, y) \in (A - B) \times C \Rightarrow x \in A - B, y \in C$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B, y \in C$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B, y \in C)$$

$$\Rightarrow (x, y) \in A \times C \quad (x, y) \notin B \times C$$

$$\Rightarrow (x, y) \in A \times C - B \times C$$

ten 2. prípad je ↑
ale opakovane dokazujeme ±

BINÁRNE RELÁCIE

- máme 2 množiny a my chceme opísať väzby medzi prvkami týchto množín

A, B množiny
↑
relácia
↓
 (A, B) množinový pár
↗
množinový pár

$$O \times O = \{ (A, B) : A \text{ je množinou } B \}$$

A a B sú ľubovoľnými množinami

Esa každému A je priradená množina B

$$\begin{matrix} A & \rightarrow & B \\ (A, B) & = & (B, A) \end{matrix}$$

Binárna relácia R medzi množinami A a B je ľubovoľná podmnožina kartezianskeho súčinu $A \times B$.

$$R \subseteq A \times B \quad \text{Bin. rel. medzi množinami } A \text{ a } B$$

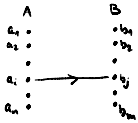
$$A = B \Rightarrow R \text{ je bin. relácia na } A$$

- n -árna relácia medzi množinami $A_1, A_2, \dots, A_n$ je podmnožina $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

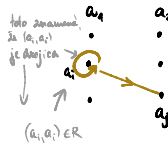
$n=3$ - ternárna relácia

• Ako reprezentovať bin. relácie?

$$R \subseteq A \times B$$



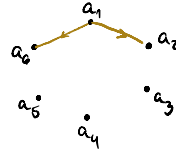
$$(a_i, b_j) \in R$$



$$(a_i, a_j) \in R$$

Diagram bin. rel. R

$$R = \{(a_1, a_2), (a_1, a_4), (a_1, a_6), (a_2, a_6), (a_3, a_6), (a_3, a_4), (a_5, a_3)\}$$

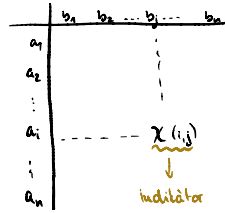


matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$



$$R \subseteq A \times B$$

$$\chi(i, j) = \begin{cases} 0 & (a_i, b_j) \notin R \\ 1 & (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

veľmi dôležitý pojem:

SKLADANIE RELÁCIÍ

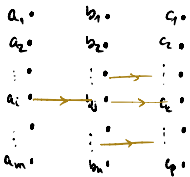
Def: Nech R je bin. rel. medzi A a B, S je bin. rel. medzi B a C.

Vytvoríme zloženú reláciu RS medzi A a C takto:

$$RS = \{(a, c) \in A \times C, \exists b \in B \text{ tak, že } (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$$

$(a, b) \in R$ sa môže zapísať aj takto $a R b$

$$\# (a, b) \in R \Leftrightarrow a R b$$



(a_i, c_k) sú v relácii,
ak existuje cesta
po šípkech z jednej
strany na druhú

PL A = obce na SR prezidenta Kováča
= muži

R na A a B

b je synom Káťa a

a je otcom Kováča b

↳ antisymetrická

S a B

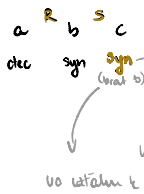
a je bratom Kováča b

↳ symetrická relácia

a je v relácii s b

a b je v relácii so

$a R b$



$R \subseteq R$

↳ je to to isté
ale byť synonym

$a \subseteq b$

$a \subseteq b \subseteq c$

brod brod syn
c = synonym a

Def: Nech R je relácia na množine A .

R je REFLEXÍVNE $\forall a \in A: aRa$ (v každom bode máme smetku)

† každý je so sebou svojim brodom

R je SYMETRICKÁ $\Leftrightarrow (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

$aRb \Rightarrow bRa \quad \forall a,b \in A$

R je TRANZITÍVNA: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R \quad \forall a,b,c \in A$

$R \subseteq R$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}^2$

ak b je potomkom a

a c je potomkom b

tak c je potomkom a

SKLADANIE TROCH RELACIÍ (odporúčam si samostatne dokazať, lebo na skúške môže byť)

TVR: Nech R, S, T sú bin. rel.

$R \subseteq A \times B$

$S \subseteq B \times C$

$T \subseteq C \times D$

Potom $(RS)T = R(ST)$

rozhodniť $\forall (a,d) \in (RS)T$

$\exists x \in C: (a,x) \in RS, (x,d) \in T$

27.10.2021

$A \times B \quad R \subseteq A \times B$

↳ bin. relácia medzi
množinami

$(a,b) \in R \quad aRb$

R na množine a

- Skladanie:

$R \subseteq A \times B$

$S \subseteq B \times C$

$aRb, bSc \Rightarrow (a,c) \in RS$

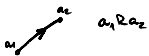
$aRSc$

$R \subseteq A \times A$

REFLEXÍVNA - $\forall a \in A: aRa$ (a je v relácii samo so sebou)

SYMETRICKÁ - $aRb \Rightarrow bRa$ (a ↔ b)

TRANZITÍVNA - $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ (a → b → c)



↳ ak: $a_1 = a_2$ (a1)

R

R

↳ inverzná (opozná)

relácia k relácii R

$$R = \{ (a,b) \in A \times A, (b,a) \in R \}$$

- symetrická relácia (testovanie): $R \subseteq R$ - tranzitívna relácia (testovanie): $RR \subseteq R$

TRANZITIVNÝ UZÁVER

BIN. REL.

- $R \cup RR \cup RRR \dots$

"predávajúce cesty"



$$\Rightarrow R^1 = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = \bigcup_{k=1} R^k$$

Veta: Nech R je ľubovoľ. bin. rel. na množine

Potom existuje (jediná) tranzitívna relácia R^1

s nasledujúcimi vlastnosťami:

(1) $R \subseteq R^1$

(2) Ak S je ľubovoľná tranzitívna bin. rel. na A

taká, že $R \subseteq S$, tak potom aj $R^1 \subseteq S$

(z toho vyplýva aj jednoznačnosť)

D:

$R \subseteq A \times A$

 $A \times A$ je tranzitívna

$\mathcal{T} = \{ S \subseteq A \times A; S \text{ je tranzitívna} \wedge R \subseteq S \}$

Ale čo to
znamená?

$\mathcal{T} \neq \emptyset \quad (A \times A \in \mathcal{T})$

$Q = \cap \mathcal{T} = \{ (a,b) \in A \times A, \forall S \in \mathcal{T}: (a,b) \in S \}$

Q je tranzitívna relácia
↳ množina $V(a,b)$,
ktorá patrí do každého
T-člana

$(a,b) \in Q \quad (b,c) \in Q$

$\exists U \in \mathcal{T}: (a,b) \in U \wedge (b,c) \in U$

u

Ale U je tranzitívna

$\Rightarrow (a,c) \in U \Rightarrow (a,c) \in Q$

je Q splňa (1) a (2)

①

② Nech S je ľub. tranzitívna relácia $R \subseteq S$

$\Rightarrow S \subseteq S^1 \Rightarrow$

$R \subseteq Q = \cap \mathcal{T} \subseteq S$

Def.: Binárna relácia R^1 splňajúca (1) a (2) z vety je tranzitívny uzáver relácie R. Naýše platí, že $R^1 = \bigcup_{k=1} R^k$.

REFLEXIVNO-TRANZITIVNÝ UZÁVER

$R \cup id_A = R^1$

$id_A = \{ (a,a) \mid a \in A \}$

$R \text{ je reflex.} \quad id_A \subseteq R$

EKVIVALENCIE A ROZKLADY

EKVIVALENCIE

Def.: Nech A je množina. $R \subseteq A \times A$

Relácia R je RELÁCIOU EKVIVALENCIE, ak R je:

- reflexívna $a = a \quad \forall a$
- symetrická $a = b \Rightarrow b = a$
- tranzitívna $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

$id_A = \{ (a,a) \mid a \in A \}$

identická

relácia

Z

$R_k \quad aR_k b \quad (k|a-b)$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a \equiv b \pmod{k}$

$k \geq 2 \quad (\text{reálna číslo})$

zákony ekvivalencie:

$a \sim b$

$a \equiv b$

$a \sim b$

$a \triangleq b$

je to relácia
ekvivalencie

$2v(a/k) = 2v(b/k)$

 $\Rightarrow k$ stupin, podľa toho, aký
zvyšok po delení číslom k
dávajú

$1 + k\mathbb{Z} = \{ 1 + kx \mid x \in \mathbb{Z} \} \quad k \geq 3$

$0 + 3\mathbb{Z}$

$1 + 3\mathbb{Z}$

$2 + 3\mathbb{Z}$

$3 + 3\mathbb{Z} \leq 0 + 3\mathbb{Z}$

↳ aký zvyšok 3 po //3 nedávať

$1 + 3\mathbb{Z} \cap 2 + 3\mathbb{Z} = \emptyset$

$i \neq j$

$(0 + 3\mathbb{Z}) \cup (1 + 3\mathbb{Z}) \cup (2 + 3\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ je celá množina } \mathbb{Z}$

$x = 0 \pmod{3}, x = 1 \pmod{3}, x = 2 \pmod{3}$

ROZKLAD

Def.: Nech A je ľub. množina.

Systém $\mathcal{Y}$ podmnožín množiny A

$$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{P}(A)$$

sa nazývajú ROZDELENÍM množiny A , ak platia nasledujúce 3 podmienky:

$$(1) X \in \mathcal{Y} \Rightarrow X \neq \emptyset$$

$$(2) X, Y \in \mathcal{Y}, X \cap Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$$

$$(3) \cup \mathcal{Y} = \{a \in A, \exists X \in \mathcal{Y} \text{ tak, že } a \in X\} = A$$

rozkladnica

I Nech $\mathcal{Y}$ je ľubovoľný rozklad množiny A .

Definujeme b.r. $R = R_{\mathcal{Y}}$ na A takto:

$$a, b \in A, \text{ a} R b \iff \exists X \in \mathcal{Y} : a \in X \wedge b \in X$$

R je relácia ekvivalencie:

$$a \in A \text{ a} R a \text{ reflex je } \text{potvrdené}$$

$$a R b \Rightarrow b R a$$

$$a R b \text{ a} R c \Rightarrow \exists X, Y : a, b \in X, a, c \in Y \Rightarrow \begin{cases} X = Y \\ \text{sa množka rovná} \end{cases}$$

$$b R c \Rightarrow \exists Y : b, c \in Y$$

$$\Rightarrow X = Y \\ a, b \in X$$

$$\text{lebo } b \in X \wedge b \in Y \Rightarrow b \in X \cap Y$$

ale prísluší 2 množin
mnohí byť posadnutí ↑ spor

II Nech R je ľubovľ relácia ekvivalencie na množine A .

Nech $a \in A$ je ľub. prvok z množ. A .

$$R[a] = \{x \in A, x R a\} \text{ triedy (bloky) ekvivalencie}$$

Všetchny, že systém $\mathcal{Y}_R = \{R[a], a \in A\}$ je rozklad množiny A .
 $a \neq b \quad R[a] \cap R[b] = \emptyset$ má byť?

$$R[a] = R[b] \iff a R b$$

$$\Leftrightarrow R[a] \subseteq R[b] \\ x \in R[a] \Rightarrow x R a \text{ a} R b$$

$$x R b \Rightarrow x \in R[b]$$

$$\Rightarrow R[a] = R[b]$$

$$\Rightarrow a \in R[a] \\ b R a \Rightarrow a R b \checkmark$$

$$\mathcal{Y}_R = \{R[a], a \in A\} \text{ je rozklad} \\ a \in R[a] \Rightarrow R[a] \neq \emptyset$$

$$R[a] \cap R[b] \neq \emptyset \Rightarrow R[a] = R[b]$$

$$\begin{array}{l|l} x \in R[a] & x R a \\ x \in R[b] & x R b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{kontrapozícia} \\ \text{opakov} \\ \text{trans.} \end{array} \\ \hline b R a \\ \downarrow \\ R[a] = R[b]$$

ČO ZNAMENÁ
ANALOGICKY?

$$A \in \mathcal{R}_A \\ A \subseteq \bigcup_{a \in A} R[a] \subseteq A \Rightarrow A = \bigcup_{a \in A} R[a] = \cup \mathcal{Y}_R$$

$$\mathcal{Y} \xrightarrow{I} \mathcal{R}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{R} \xrightarrow{II} \mathcal{T} = \{R[a], a \in A\} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{Y}$$

$$\mathcal{R} \xrightarrow{III} \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_R \xrightarrow{I} \mathcal{Q}_{\mathcal{Y}} \Rightarrow \mathcal{Q} = \mathcal{R}$$

- existuje jednoznačný vzťah
medzi rozkladmi množiny a
reláciami ekvivalencie

↳ 2 strany toho istého
fenoménu